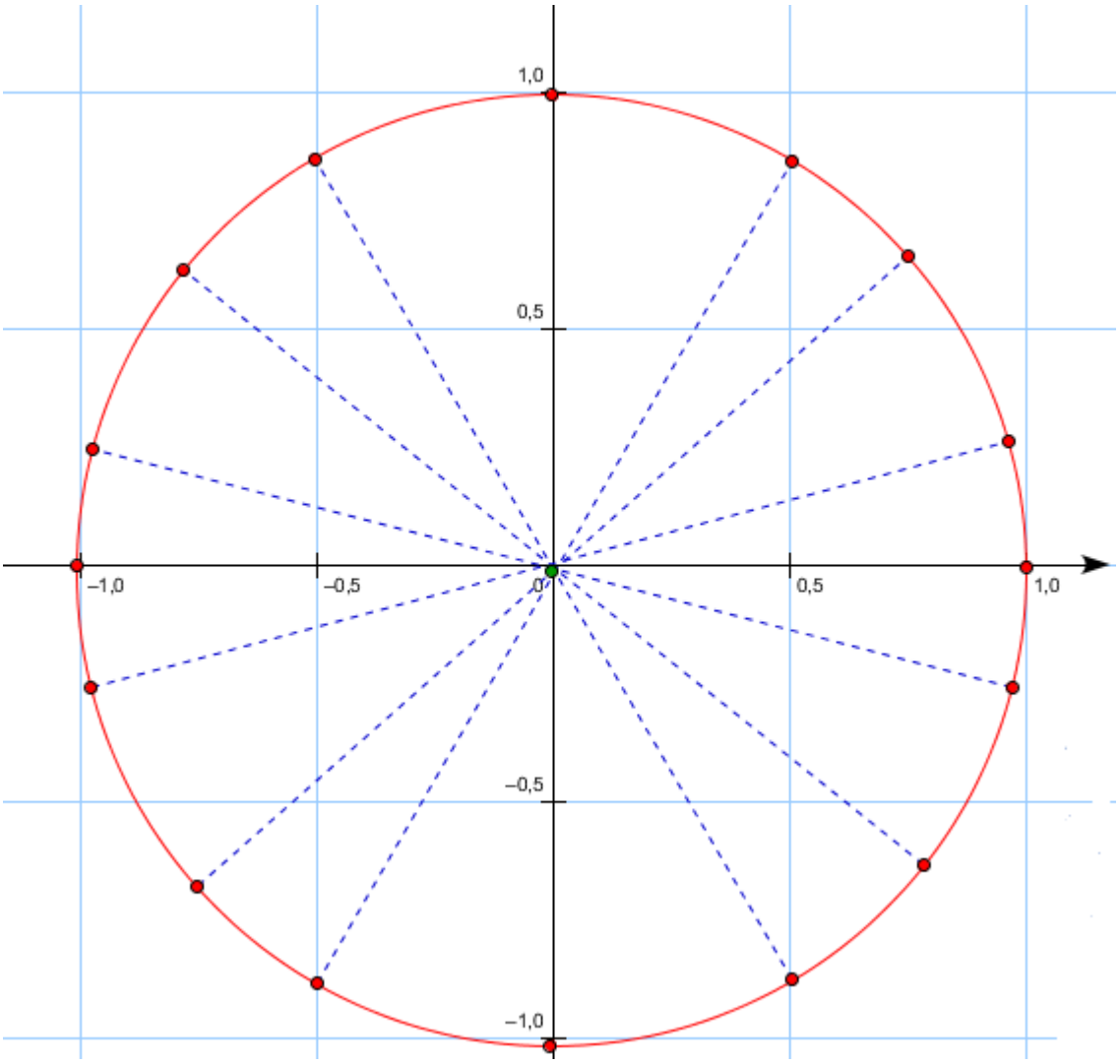
Опорный конспект № 1. Тригонометрическая окружность

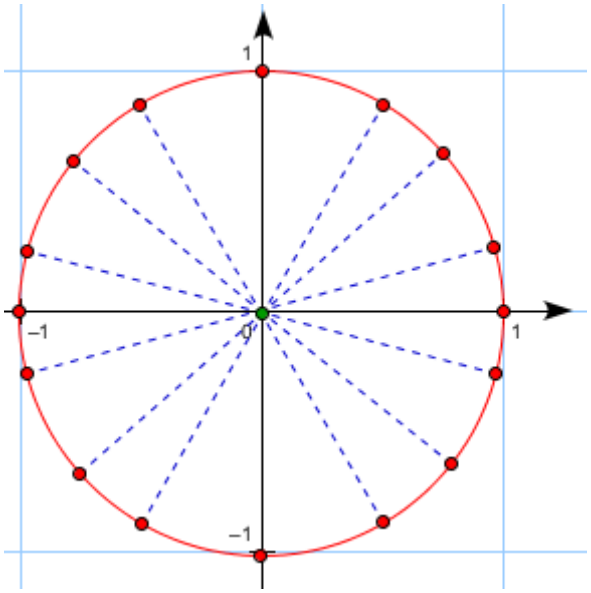


Упростите выражение: $3a^2b \cdot (4ab - 2a^3) =$

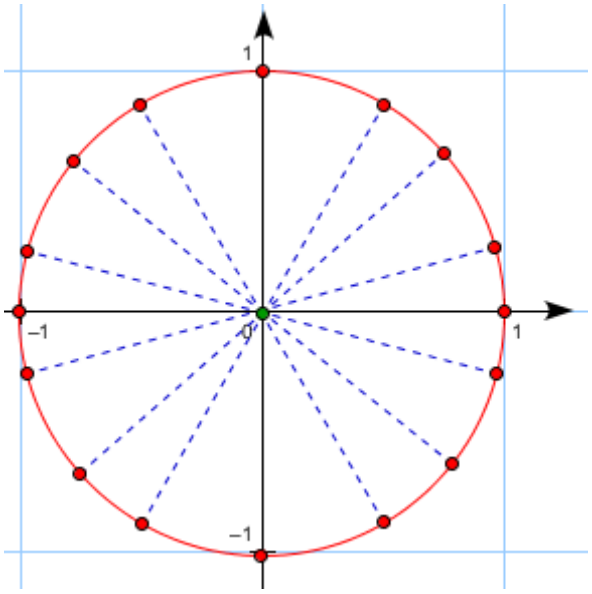
$(5a + 4) \cdot (5a - 4) =$

$(6a + 5) \cdot (6a + 5) =$

Задание 1. Какой точки на окружности, соответствует заданное число $\frac{-\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{-5\pi}{2}$; $\frac{-7\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{-11\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{2}$; -3π; 0; 4π; 11π; 77π; -13π; 20π; 17π

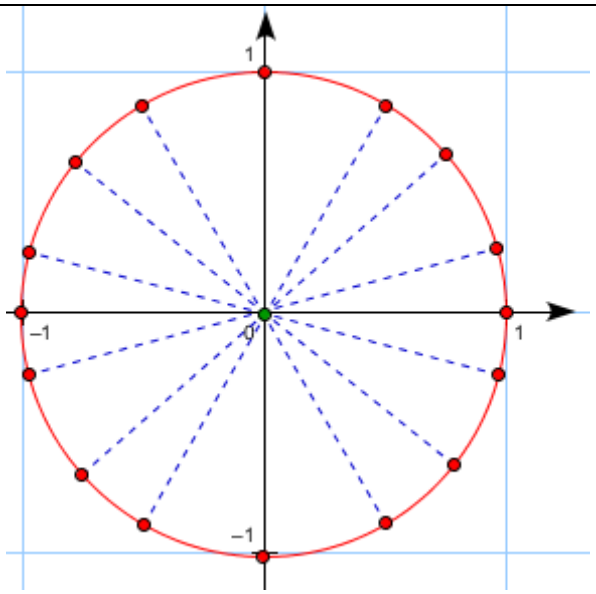


Задание 2. Какой точки на окружности, соответствует заданное число $\frac{-\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{-2\pi}{3}$; $\frac{-5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{22\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{-19\pi}{3}$; $\frac{-16\pi}{3}$; $\frac{-17\pi}{3}$

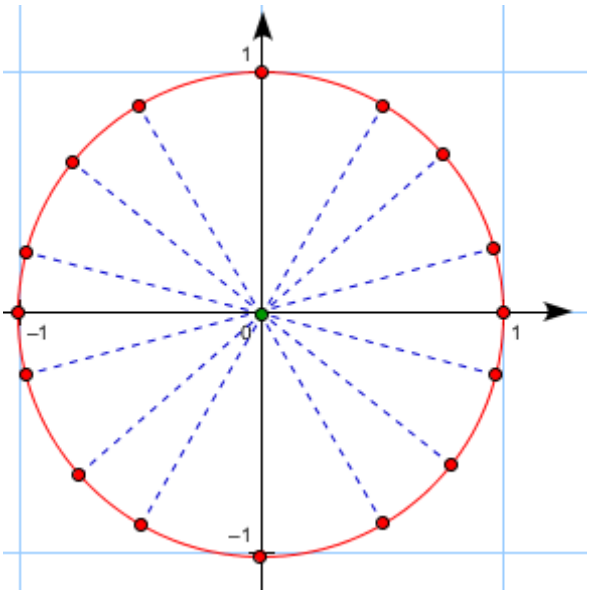


Упростите выражение: $(3x+2)\cdot(2x-1)-3x\cdot(2x+3)+2x$

Задание 3. Какой точки на окружности, соответствует заданное число $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-7\pi}{6}$; $\frac{-11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{-\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$; $\frac{-29\pi}{6}$



Задание 4. Какой точки на окружности, соответствует заданное число $\frac{\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{-7\pi}{2}$; $\frac{-17\pi}{4}$; $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{-\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-11\pi}{6}$; $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{-13\pi}{4}$; $\frac{14\pi}{3}$

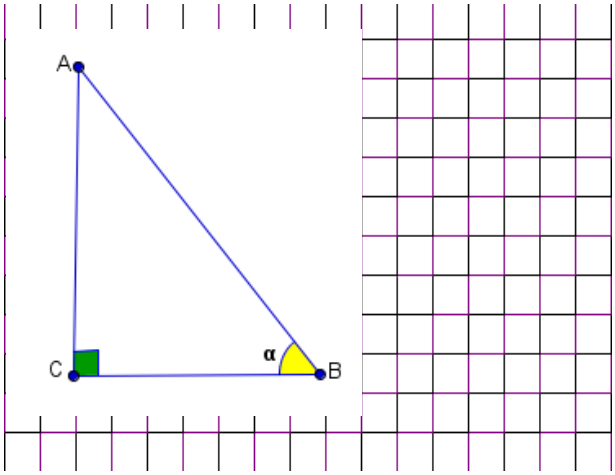


Вынесите общий множитель:

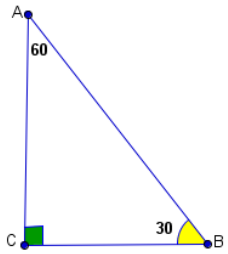
$5a^2b + 10ab^2 + 15a^3b^3$

$2a(b + y) + 3b(b + y)$

Задание 1. Запишите определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса острого угла прямоугольного треугольника



Вывод значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса острого угла прямоугольного треугольника

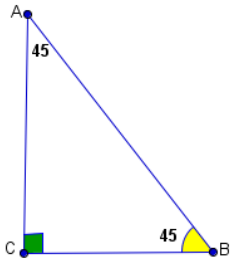


$sin(30°) =$ _____ $sin(60°) =$ _____

$cos(30°) =$ _____ $cos(60°) =$ _____

$tg(30°) =$ _____ $tg(60°) =$ _____

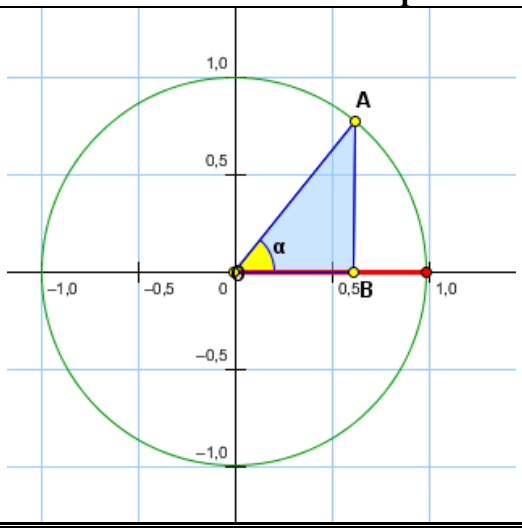
$ctg(30°) =$ _____ $ctg(60°) =$ _____



$sin(45°) =$ _____ $cos(45°) =$ _____

$tg(45°) =$ _____ $ctg(45°) =$ _____

Тригонометрическая окружность



Косинус угла α

Синус угла α

Тангенс угла α

Котангенс угла α

Ось косинусов, синусов, тангенсов и котангенсов

Вычислите: $4^{-3} =$ __ ; $81^{\frac{1}{4}} =$ __ ; $125^{\frac{1}{3}} =$ ___ ; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$ ___; $\sqrt[4]{625} =$ _____; $27^{\frac{2}{3}} =$;

ФОРМУЛЫ: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

33 -20 - 80

Табличные значения тригонометрических функций

$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ___; $sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$ ___; $tg\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$ ___; $ctg\left(-\frac{31\pi}{4}\right) =$ ___; $cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) =$ ___

$sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$ ___; $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$ ___; $tg\left(-\frac{8\pi}{3}\right) =$ ___; $ctg\left(-\frac{11\pi}{3}\right) =$ ___; $sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$ ___

$cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) =$ ___; $sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) =$ ___; $tg\left(-\frac{11\pi}{4}\right) =$ ___; $ctg\left(-\frac{4\pi}{3}\right) =$ ___; $sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$ ___

$cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) =$ ___; $sin(3\pi) =$ ___; $tg\left(-\frac{11\pi}{6}\right) =$ ___; $ctg\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$ ___; $sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) =$ ___

$cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) =$ ___; $cos(-7\pi) =$ ___; $tg\left(\frac{25\pi}{4}\right) =$ ___; $ctg(0) =$ ___; $sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) =$ ___

$cos(-4\pi) =$ ___; $sin\left(-\frac{19\pi}{2}\right) =$ ___; $ctg\left(\frac{21\pi}{4}\right) =$ ___; $tg(2\pi) =$ ___; $sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) =$ ___

$cos(0) =$ ___; $sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$ ___; $ctg\left(\frac{31\pi}{4}\right) =$ ___; $tg\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$ ___; $sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) =$ ___

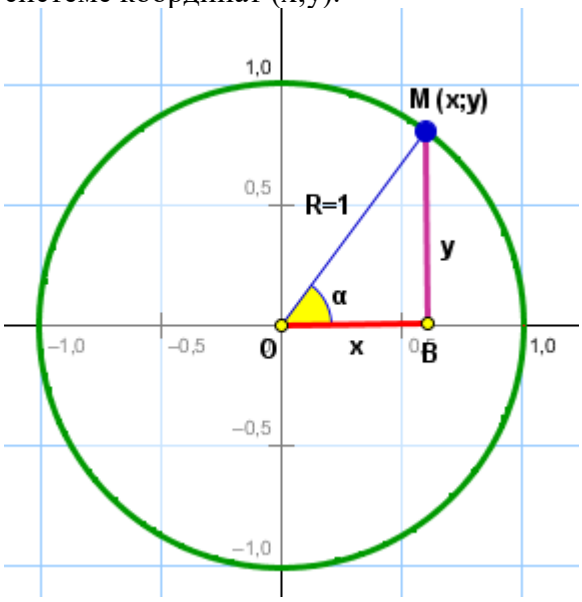
Разложите на множители:

1) $10x - 1 - 25x^2$

2) $-16p^6 + 25c^{10}$

Основное тригонометрическое тождество и его следствия

Пусть точка М лежит на тригонометрической окружности и имеет координаты в декартовой системе координат (x;y).



Формулы

$$tg(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

$$ctg(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1;$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

$$ctg(\alpha) \cdot tg(\alpha) = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$$

$$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

Вывод формул

Рассмотрим прямоугольный треугольник OMB. Катеты треугольника равны MB = ***x***, OB= ***y***, а гипотенуза OM = R = 1.

Формула 1.

Запишем отношения для прямоугольного треугольника.

$$sin(\alpha) = \frac{MB}{OM} = \frac{y}{R} = y;$$

$$cos(\alpha) = \frac{OB}{OM} = \frac{x}{R} = x;$$

$$tg(\alpha) = \frac{MB}{OB} = \frac{y}{x} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)};$$

$$ctg(\alpha) = \frac{OB}{MB} = \frac{x}{y} = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)};$$

Формула 2

Запишем для Δ OMB теорему Пифагора

$$OM^2 = MB^2 + OB^2$$

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$$

ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

Формула 3

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1 | : cos^2\alpha$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Формула 4

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1 | : sin^2\alpha$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

Формула 5

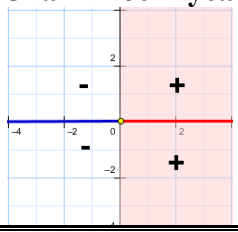
$$ctg(\alpha) \cdot tg(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \cdot \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = 1$$

Формула 6

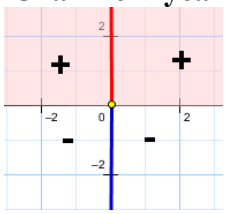
$$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$$

$$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

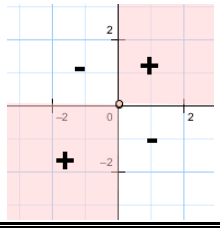
Знаки косинуса



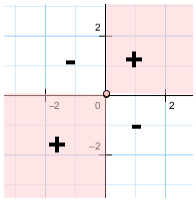
Знаки синуса



Знаки тангенса



Знаки котангенса



Разложите на множители: $9p^2 - 4 =$

$5x^2 - 45 =$

$ax^2 - 4a =$

Задание 1. Поставьте в соответствие

$1-cos^2\alpha=$	1	$tg\alpha\cdot cos\alpha=$	0
$3sin^2\alpha+3cos^2\alpha=$	3	$1-cos^2x-sin^2x=$	$\cos^2\alpha$
$2-sin^2\mu-cos^2\mu=$	$\sin^2\alpha$	$(1-sinx)\cdot(1+sinx)=$	1
$sin^2\alpha-1=$	$-\cos^2\alpha$	$\frac{1-sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=$	$\sin\alpha$
$\frac{1}{sin^2\alpha}=$	$1+\mathrm{ctg}^2\alpha$	$\frac{1}{cos^2\alpha}-1=$	$\mathrm{tg}^2\alpha$
$tg\alpha\cdot ctg\alpha=$	1		

Задание 2. Упростите выражения

1) $1-sin^2\alpha=$

2) $cos^2\beta-1=$

3) $sin\beta\cdot ctg\beta=$

4) $\frac{sin^2\alpha-1}{1-cos^2\alpha}=$

5) $(1-cos\varphi)\cdot(1+cos\varphi)=$

6) $sin^2\alpha-tg\alpha\cdot ctg\alpha=$

7) $sin^2\beta+cos^2\beta+ctg^2\beta=$

8) $sin\left(\frac{t}{2}\right)+cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot tg\left(\frac{t}{2}\right)=$

9) $ctg^2\alpha\cdot(cos^2\alpha-1)+1=$

10) $sin^2\beta+cos^2\beta+tg^2\beta=$

11) $cos^2\alpha-(ctg^2\alpha+1)\cdot sin^2\alpha=$

Задание 3.

1) $\frac{3}{\sin^2 22°+2+\cos^2 22°}=$

2) если $\mathrm{tg}\alpha=0{,}2$, вычислите $\frac{3\cos\alpha-15\sin\alpha+14}{5\sin\alpha-\cos\alpha+7}$

3) $30\sqrt{6}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$

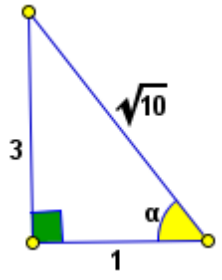
4) если $6\cdot\sin^2\alpha+9\cdot\cos^2\alpha=8$, найдите $tg^2\alpha$

5) если $\frac{5\sin\alpha+5\cos\alpha+2}{5\sin\alpha+2\cos\alpha+3}=\frac{2}{3}$, вычислите $\mathrm{tg}\alpha$

Задание 4. Разберите пример.

Найдите значение тригонометрических функций угла α, если известно что $tg\alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение:



1) Тригонометрические функции одного угла по определению связаны прямоугольным треугольником. Рассмотрим его.

2) По определению тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике катеты имеют длину 3 у.е и 1 у.е.

3) По теореме Пифагора найдем длину гипотенузы. Она равна $\sqrt{10}$. Запишем отношения для других тригонометрических функций.

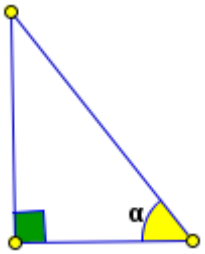
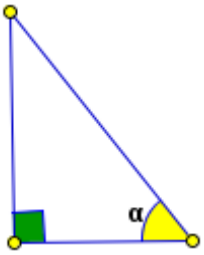
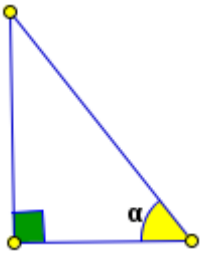
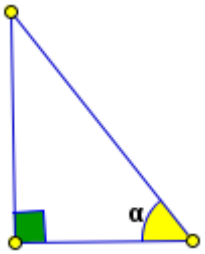
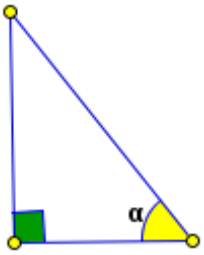
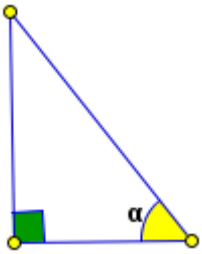
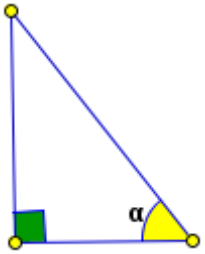
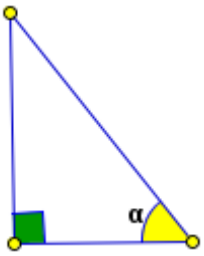
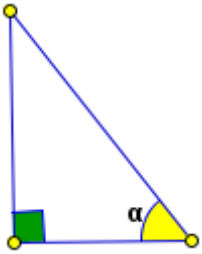
$sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $ctg\alpha = \frac{1}{3}$

4) По условию угол принадлежит промежутку $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, определим знаки

$sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$; $cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$; $ctg\alpha = +\frac{1}{3}$

ПОМНИТЬ: значение функций и ее знак

Задание 6. Вычислите значение тригонометрических функций угла β, зная что

1) $sin\alpha = \frac{40}{41}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 	**2)** $tg\alpha = -0{,}2$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ 	**3)** $cos\alpha = -\frac{3}{7}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ 
4) $sin\alpha = -\frac{4}{5}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ 	**5)** $ctg\alpha = -2{,}5$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 	**6)** $tg\alpha = -\frac{7}{3}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 
7) $cos\alpha = -\frac{2}{7}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 	**8)** $sin\alpha = 0{,}6$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 	**9)** $tg\alpha = -5$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ 

Вычислите.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} + 0{,}25^{-2} =$

Заполните таблицу

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\mathrm{tg}\,\alpha$								
$\mathrm{ctg}\,\alpha$								

α	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$-3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{20\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{23\pi}{6}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\mathrm{tg}\,\alpha$								
$\mathrm{ctg}\,\alpha$								

Выполните преобразования

1) Известно, что $ctg\gamma = \frac{12}{5}$ и $3\pi < \gamma < \frac{7\pi}{2}$, найдите значение остальных тригонометрических функций.	**2)** Упростите выражение $\left(1 + ctg^2\alpha + \frac{1}{ctg^2\alpha}\right) \cdot sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$
3) Упростите выражение $\frac{cos^4 4\alpha + sin^2\alpha \cdot cos^2 4\alpha}{0{,}5 \cdot ctg4\alpha}$	**4)** Вычислите $tg\beta$, если известно, что $\frac{sin\beta + 3cos\beta}{sin\beta - 3cos\beta} = 4$
5) Вычислите $\frac{10 + 15cos\delta + 3sin\delta}{4 + sin\delta + 5cos\delta}$, если $tg\delta = -5$	**6)** Вычислите $4 \cdot sin(-300°) \cdot cos(210°)$
7) Найдите $2\sqrt{3} \cdot cos\alpha$, если $sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	**8)** Вычислите $2\sqrt{12} \cdot cos(510°)$
9) Найдите $\sqrt{2} \cdot tg\alpha$, если $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$	**10)** Вычислите $2 \cdot cos^2(-510°)$
11) Найдите $\frac{10}{\sqrt{17}} cos\alpha$, если $sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	**12)** Вычислите $\frac{-12}{sin^2(155°) + sin^2(475°)}$
13) Найдите $tg\alpha$, если $\frac{sin\alpha + 13cos\alpha}{2sin\alpha - 4cos\alpha} = 2$	**14)** Найдите $\frac{2sin\alpha - 4cos\alpha}{sin\alpha - 2cos\alpha}$, если $tg\alpha = 4$
15) Найдите значение выражения $4\sqrt{6} \cdot sin(780°) \cdot cos(-225°)$	**16)** Вычислите $\frac{3}{sin^2 22° + 2 + cos^2 22°}$
17) Вычислите $\sqrt{2} \cdot cos\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$	**18)** Найдите $tg\alpha$, если $\frac{sin\alpha + 4cos\alpha + 20}{2sin\alpha - 4cos\alpha + 10} = 2$
19) Найдите $ctg\alpha$, если $\frac{12sin\alpha - 4cos\alpha + 8}{2sin\alpha - cos\alpha + 1} = 8$	**20)** Найдите $5\sqrt{7}sin\alpha$, если $cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
21) Найдите $20\sqrt{5}sin\alpha$, если $ctg\alpha = 2$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	**22)** Вычислите значение выражения: $3 \cdot tg33 \cdot ctg33$

Задачи с прикладным содержанием (Задание № 7).

Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 1,4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=14$ м/с^2. Считайте, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Водолазный колокол, содержащий $\nu=5$ моль воздуха объёмом $V_1=26$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 (в л). Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A=\alpha\nu T\log_2\frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha=8{,}5\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T=300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 будет занимать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 25 500 Дж. Ответ дайте в литрах.

Двигаясь со скоростью $v=5$ м/с, трактор тащит сани с силой $F=100$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N=Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 250 кВт (кВт — это $\frac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\text{с}}$).

Два тела, массой $m=10$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v=10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 750 джоулей.

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t)=at^2+bt+H_0$, где H — высота столба воды в метрах, $H_0=8$ м — начальный уровень воды, $a=\frac{1}{72}$ м/мин^2 и $b=-\frac{2}{3}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. Сколько минут вода будет вытекать из бака?

Сила тока I (в А) в электросети вычисляется по закону Ома: $I=\frac{U}{R}$, где U — напряжение электросети (в В), R — сопротивление подключаемого электроприбора (в Ом). Электросеть прекращает работать, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к электросети с напряжением 220 В, чтобы электросеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.